

П.3 А-устойчивость

21/04

По существу, А-уст-ть есть уст-ть
вычислит. алгоритма на реш-и зад.

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = Au, \quad t > 0, & (*) \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

Опр ЛММ наз-ся абсолютно устой-
чивым г/данных τ и Δ , if его хар. ф-ние
г/ (*) имеет при этих τ и Δ корни, распо-
ложенные внутри единичной окруж-ти
(τ -шаг по времени ЛММ)

Опр Мн-во всех точек комплексной
пл-ти $\tau\Delta$, г/д ЛММ реш-я (*) абсолют-
но уст., наз-ся обл-тью абсолют. уст-ти.

Опр ЛММ наз-ся А-устойчивым,
if обл-ть его абсолют. уст-ти содержит
левую полупл-ть: $\operatorname{Re}(\tau\Delta) < 0$.

! Зам В обычной ситуации мал по времени $\tau > 0$. Тем самым, А-уст-ть предпалагает, что if $\Delta < 0$ - то мет. уст. А, в свою очередь, усл-е $\Delta < 0$ означает, что реш-е (*) $y \in \mathbb{C}^n$ убывает. Т.е. А-уст-ть требует уст-ти убывающих реш-й (это, по-существу, необходимо)

Примеры

① Лин. мет. Эйл.: $\frac{u_{n+1} - u_n}{\tau} = f(u_n)$

Р/заг. (*): $\frac{u_{n+1} - u_n}{\tau} = \Delta u_n,$

$$u_{n+1} - u_n = \tau \Delta u_n,$$

$$u_{n+1} - (1 + \tau \Delta) u_n = 0.$$

Кар. ур-ние: $q - (1 + \tau \Delta) = 0 \Leftrightarrow q = 1 + \tau \Delta$

Усл-е абс. уст-ти: $|q| = |1 + \tau \Delta| \leq 1$

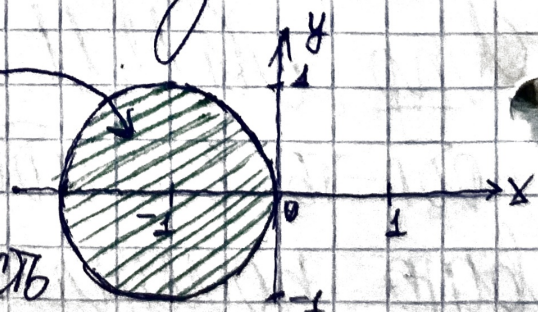
$$\tau \Delta = z = x + iy$$

$$|1 + \tau \Delta| = |1 + x + iy| = (1+x)^2 + y^2 < 1 \Rightarrow \text{это}$$

окруж-ть

Впл-ть абс. уст-ти

Впл-ть неуст-ти $\rightarrow$ внешность



Как видно, вол-ть летит в левой полуш-ти, но ее не содержит: схема не А-уст.

② Явно-неявн. мет. Эйн.: $\frac{U_{n+1} - U_n}{\tau} = f(U_{n+1}) \Rightarrow$
 $\Rightarrow \frac{U_{n+1} - U_n}{\tau} = \partial U_{n+1}$

Для ур-ние: $U_{n+1} (1 - \tau \partial) - U_n = 0,$
 $q (1 - \tau \partial) - 1 = 0,$
 $q = \frac{1}{1 - \tau \partial} \Rightarrow |q| = \frac{1}{|1 - \tau \partial|}$

Усл-е абс. уст-ти: $|q| \leq 1 \Leftrightarrow |1 - \tau \partial| \geq 1$
 $\tau \partial = z = x + iy,$
 $|1 - x - iy| = \sqrt{(1-x)^2 + y^2} \geq 1$ — это усл-е абс. уст-ти:

Абс. уст-ть

Вол-ть абс. уст-ти $\rightarrow$ внешность круга, Δ содержит левую полуш-ть $\Rightarrow$ метод А-уст.

③ Явно-неявн. мет. Эйн.:

$\frac{U_{n+1} - U_n}{\tau} = \frac{f(U_{n+1}) + f(U_n)}{2}$ — это метод 2-го порядка точности.

$$A) (*) : \frac{U_{n+1} - U_n}{T} = 0 \Leftrightarrow \frac{U_{n+1} + U_n}{2} \Leftrightarrow U_{n+1} - U_n =$$

$$= \frac{T\theta}{2} (U_{n+1} + U_n) \Leftrightarrow U_{n+1} \left(1 - \frac{T\theta}{2}\right) - \left(1 + \frac{T\theta}{2}\right) U_n = 0$$

$$\text{Дар. ур-нне: } q \left(1 - \frac{T\theta}{2}\right) - \left(1 + \frac{T\theta}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow q = \frac{1 + \frac{T\theta}{2}}{1 - \frac{T\theta}{2}}$$

$$\text{Уст-е абе. уст-ми: } |q| = \frac{\left|1 + \frac{T\theta}{2}\right|}{\left|1 - \frac{T\theta}{2}\right|} \leq 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left|1 + \frac{T\theta}{2}\right| \leq \left|1 - \frac{T\theta}{2}\right| - \text{абе. уст-мб}$$

$$\left[T\theta = x + iy \Rightarrow \left|1 + \frac{x}{2} + i\frac{y}{2}\right| \leq \left|1 - \frac{x}{2} - i\frac{y}{2}\right| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(1 + \frac{x}{2}\right)^2 + \frac{y^2}{4} \leq \left(1 - \frac{x}{2}\right)^2 + \frac{y^2}{4} \Leftrightarrow 1 + 2\frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} \leq$$

$$\Leftrightarrow 1 - 2\frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} \Leftrightarrow x \leq -x \Leftrightarrow \boxed{x \leq 0} - \text{одн-тб}$$

абе. уст-ми; это, как раз, левая неравен-тб, те. метод А-уст.

↓ Среди ЛММ ТЭ явных
А-уст. методов

↓ Среди неявных ЛММ
ТЭ А-уст. методов,
имеющих пор-к точ-
ности выше 220.

Н Двухчленная р-на дискрет-ная назад (q/(*))

$$\frac{1}{T} \left[\frac{3}{2} u_{n+1} - 2u_n + \frac{1}{2} u_{n-1} \right] = \Delta u_{n+1} = f(u_{n+1})$$

Дан. ур-ние: $\frac{3}{2} q^2 - 2q + \frac{1}{2} = T \Delta q^2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow T \Delta = \frac{3}{2} - \frac{2}{q} + \frac{1}{2q^2}$$

$\exists z = zq \Rightarrow z = \frac{3}{2} - \frac{2}{q} + \frac{1}{2q^2}$ — граница ол-
 -ти при данном q . Нам интересуют $|q|=1 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow q = e^{-i\varphi}$

Найдем на пл-ти (x, y) кривую z при $q = e^{-i\varphi}$ (а потом поймем, где $|q| \leq 1$: внутри или снаружи).

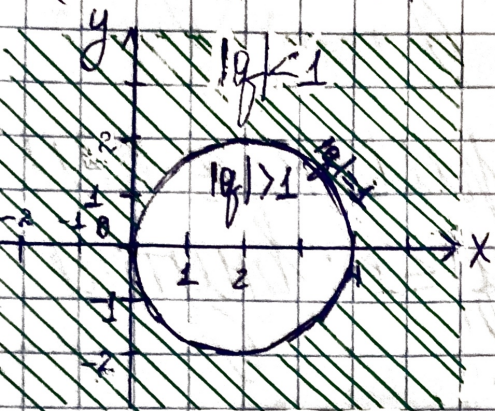
Итак: $z = \frac{3}{2} - 2e^{i\varphi} + \frac{e^{2i\varphi}}{2}$

Покажем, что это замкн. кривая, сим-
 метричная относительно Ox при $\varphi \in [0, 2\pi]$.

$$\begin{aligned} z &= \frac{3}{2} - 2e^{i\varphi} + \frac{e^{2i\varphi}}{2} = \frac{3}{2} - 2\cos\varphi - 2i\sin\varphi + \frac{\cos 2\varphi}{2} + \\ &+ \frac{i\sin 2\varphi}{2} = \frac{3}{2} - 2\cos\varphi + \frac{\cos 2\varphi}{2} + i(-2\sin\varphi + \frac{\sin 2\varphi}{2}) = \\ &= \frac{3}{2} - 2\cos\varphi + \frac{2\cos^2\varphi - 1}{2} + i(-2\sin\varphi + \sin\varphi\cos\varphi) = \\ &= \frac{3}{2} - 2\cos\varphi + \cos^2\varphi - \frac{1}{2} + i\sin\varphi(-2 + \cos\varphi) = \{t = \cos\varphi\} \\ &= \frac{3}{2} - \frac{1}{2} - 2t + t^2 \pm i\sqrt{1-t^2}(2-t) = (1-t)^2 \pm i\sqrt{1-t^2}(2-t) \end{aligned}$$

Итак, при $q = e^{-i\varphi} \Rightarrow z = (1-t)^2 \pm i\sqrt{1-t^2}(2-t)$
 1) $\operatorname{Re} z = (1-t)^2 \geq 0 \Rightarrow$ кривая лежит в прав.
 полупл-ти

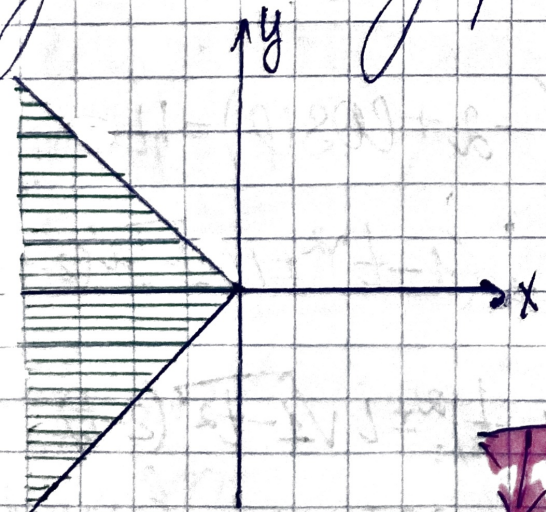
2) $\operatorname{Im} Z = \pm \sqrt{1-t^2} (2-t)$ обращается в 0 при $t = \pm 1$,
 ($|t| = |\cos \varphi| \leq 1$). При этих t : $\operatorname{Re} Z = 0, t = 1,$
 $\operatorname{Re} Z = 4, t = -1$.



Эта граница разделяет обл-ти $q < 1$ и $q > 1$. If $|q| \rightarrow +\infty$, то $z \rightarrow \frac{3}{2}$, т.е. при $|q| \rightarrow \infty$ $\operatorname{Re} Z \rightarrow \frac{3}{2} \in [0, 4]$ на оси z , и $\Rightarrow$ обл-ть $|q| \leq 1$ — внешность.

И.о., обл-ть абс. уст-ти — вне замкн. фигуры и содержит лев. полупл-ть $\Rightarrow$ метод А-уст.

Опр Метод наз-ся А(α) уст., if обл-ть уст-ти содержит угол $|\arg(-tA)| < \alpha$.
 При $\alpha = \frac{\pi}{2}$ А(α) и А-уст-ть совпадают.



Зам! Тем самым, $\forall$ А-уст. схема явл-ся А(α)-уст.

↓ Явные ЛМН не явл-ся

А(α)-уст. при $\forall \alpha$.

↓ $\exists$ ЛМН 3 и 4-го порядка точности А(α)-

-уст при $H\alpha < \frac{\pi}{2}$

Зам $A(\alpha)$ -уст-ть означает, что $g/a\delta c$
уст-ти нужно выбирать мал по вре-
мени.